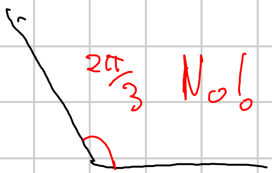
Geometria iperbolica 06-05

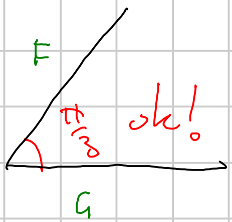
Dim ≥ 4 • Non esistono teoremi di iperbolizzazione

• In generale è difficile descrivere la metrica iperbolica

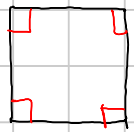
Politopi di Coxeter:

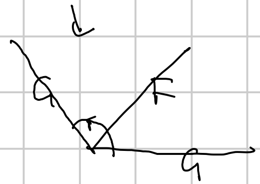
Def: Un politopo $P \subset \mathbb{H}^n$ (intersezione di semispazi) è di Coxeter se l'angolo interno all'intersezione di due faccette in ∂P è del tipo $\frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$





$F \circ G$ = rotazione di angolo $\frac{2\pi}{3}$

Esempio Euclideo 



Oss: Dato $P \subset \mathbb{H}^n$ di Coxeter sia $\Gamma_P < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ generato dalle riflessioni nelle faccette di P. Γ_P è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ (gruppo di Coxeter)

1) Se P ha volume finito, allora Γ_P è un reticolo in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$

2) Per il lemma di Selberg, $\exists\, \Lambda < \Gamma$ di indice finito tale che Λ è senza torsione, e $M_\Lambda = \mathbb{H}^n / \Lambda$ è una varietà iperbolica completa, di volume finito, tassellata da copie del P.

Problema: 1) Costruire politopi di Coxeter di volume finito

Teo: Non esistono politopi di Coxeter in $\mathbb{H}^n$ se $n > 996$.

Esempi noti fino a dim. 19 + un esempio in dim. 21.

2) Costruire $\Lambda < \Gamma$ senza torsione è difficile. L'indice di Λ in Γ può essere enorme.

Def: $P \subset \mathbb{H}^n$ è semplice se ogni faccia di codimensione k giace all'intersezione di k faccette di P.

Prop: $P \subset \mathbb{H}^n$ di Coxeter $\Rightarrow$ P è semplice

Oss: Dato $P \subset \mathbb{H}^n$ di Coxeter, abbiamo una presentazione esplicita del gruppo $\Gamma_P = \langle \underbrace{g_1, \dots\dots, g_s}_{} \mid g_i^2, \underbrace{(g_i g_j)}^{n} \rangle < Isom(\mathbb{H}^n)$

generatori in corr. 1-1 con le faccette di P

se F_i e F_j si intersecano con angolo $\frac{\pi}{n}$

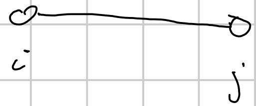
Se $F_i \cap F_j = \phi$

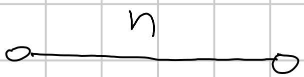
$\langle g_i, g_j \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Diagramma di Coxeter: $V = \{\text{faccette di } P\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Generatori di Γ_P

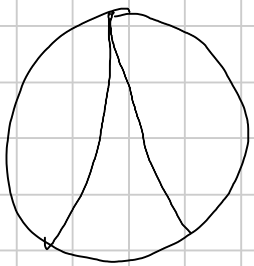
1) Se F_i, F_j sono ortogonalmente allora g_i, g_j commutano

$\underset{i}{\circ}$ $\underset{j}{\circ}$ nessuno spigolo

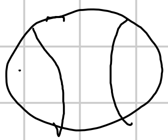
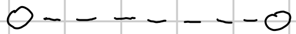
2) Se F_i, F_j si $\cap$ con angolo $\frac{\pi}{3}$ $\rightsquigarrow$ 

3) Se F_i, F_j " " " " $\frac{\pi}{n}$ $\rightsquigarrow$ 

4) Se gli iperpiani contenenti F_i e F_j sono $/\!/$ all'∞

 $\rightsquigarrow$ 

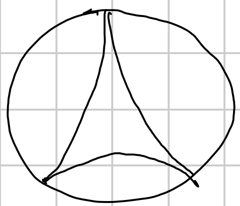
5) Se gli iperpiani sono ultraparalleli

 $\rightsquigarrow$ 

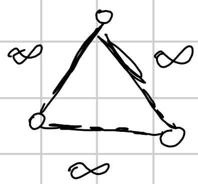
Esempi: dim 2) Gruppi triangolari:

$\Gamma(m,n,l)$ generati da riflessioni in un triangolo iperbolico con angoli interni $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{l}$ con $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{l}<1$ (m, l, n possono essere anche $+\infty$, in tal caso il triangolo è non compatto).

$\Gamma(\infty,\infty,\infty)$ = gruppo generato dalle riflessioni in un triangolo ideale



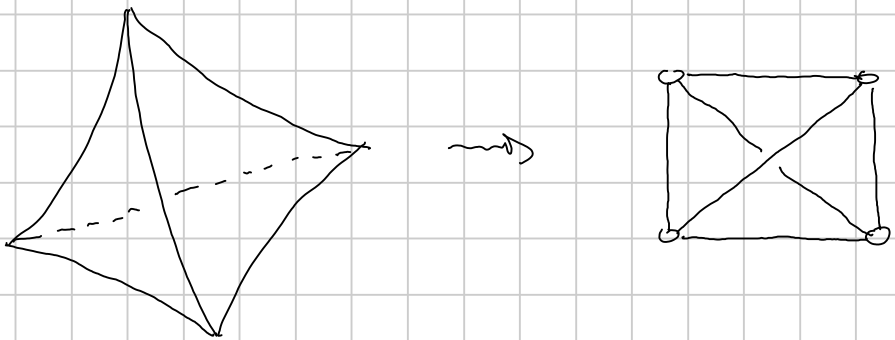
$\Gamma(\infty,\infty,\infty) = \langle a,b,c \mid a^2, b^2, c^2 \rangle$



dim. 3: P = ottaedro ideale regolare. È un politopo ad angoli retti.

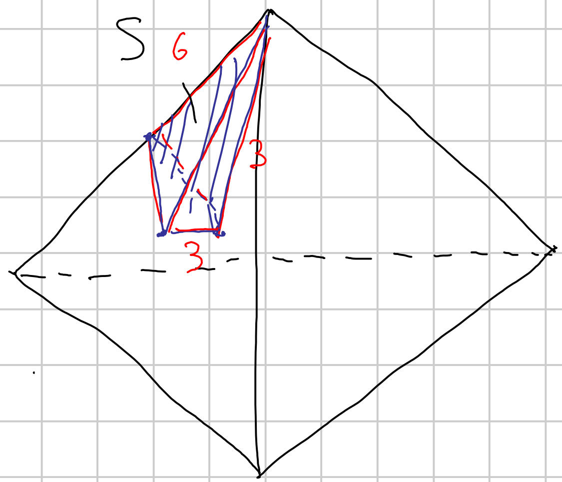
Infatti tutti gli angoli diedrali sono $\frac{\pi}{2}$.

T = tetraedro ideale regolare



Prop: Sia $P \subseteq \mathbb{H}^n$ un politopo regolare (non necessariamente di Coxeter)

Allora $\mathrm{Symm}(P)$ è generato da riflessioni e $P/\mathrm{Symm}(P)$ è combinatorialmente un simplesso, (il simplesso caratteristico)



Γ_S è di Coxeter, e $\Gamma_S > \Gamma_T$

$\Gamma_S =$ o—o—o—6—o

Il modo figura S è un rivestimento di S.

$$\underset{\text{finito in}}{\pi_1(M) < \Gamma_S}$$
